DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2014.03.010

西北大学学报(自然科学版)
2014年6月,第44卷第3期,Jun.,2014,Vol.44,No.3
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

Mersenne 数的 Smarandache 函数值的下界

王枭涵

(西安外国语大学 经济金融学院,陕西 西安 710127)

摘要: 对于正整数 n, 设 $S(n)$ 是 n 的 Smarandache 函数。对于素数 p, 设 $M_p = 2^p - 1$ 是 Mersenne 数。文中运用初等方法讨论了 $S(M_p)$ 的下界。证明了: 对于任何正整数 x, 如果 $p \geqslant 9x^2(\log x + 1)^3$, 则必有 $S(M_p) \geqslant 2xp + 1$。

关 键 词: Mersenne 数; Smarandache 函数; 下界

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274X(2014)03-0367-03

The lower bound for Smarandache functions values of Mersenne numbers

WANG Xiao-han

(Economy and Finance School, Xi′an International Studies University, Xi′an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, Let $S(n)$ be the Smarandache function of n. For any prime p, let $M_p = 2^p - 1$ be a Mersenne number. In this paper, by using some elementary methods, the lower bound for $S(M_p)$ is discussed. It is proved that, for any positive integer x, if $p \geqslant 9x^2(\log x + 1)^3$, then $S(M_p) \geqslant 2xp + 1$.

Key words: Mersenne number; Smarandache function; lower bound

设N是全体正整数的集合。对于素数 p,形如 $2^p - 1$ 的正整数称为 Mersenne 数,记作 M_p。长期以来,Mersenne 数的算术性质一直是数论中引人关注的研究课题(参见文献[1]的问题A3)。本文将讨论 Mersenne 数的 Smarandache 函数值的下界估计。

对于正整数 n,设

$$S(n) = \min\{m \mid m \in \mathbf{N}, n \mid m!\}, \quad (1)$$

称为 n 的 Smarandache 函数。2011年,乐茂华[2]证明了:当 p 是奇素数时,$S(M_p) \geqslant 2p + 1$。2008年,苏娟丽[3]证明了:当 $p \geqslant 7$ 时,$S(M_p) \geqslant 6p + 1$。2010年,温田丁[4]进一步证明了:当 $p \geqslant 17$ 时,$S(M_p) \geqslant 10p + 1$。此后,李粉菊和杨畅宇[5],石鹏和刘卓[6]分别将上述结果推广到了形如 $a^p + b^p$ 的正整数。本文将对 $S(M_p)$ 的下界证明以下一般性的结果。

定理 1 对于任何正整数 x,如果 $p \geqslant 9x^2(\log x + 1)^3$,则必有 $S(M_p) \geqslant 2xp + 1$。

1 若干引理

引理1 对于正数 y,必有 $y > \log(1 + y) > y/(1 + y)$。

证 明 参见文献[7]第5.1节。

引理2 对于正整数 k,必有

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} < \log k + 1。 \quad (2)$$

证 明 当 $k = 1$ 时,式(2)显然成立。如果

收稿日期:2013-05-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11371291);陕西省教育厅基金资助项目(12JK0883);陕西省自然科学青年基金项目(2014JM1006)
作者简介:王枭涵,女,山东菏泽人,日本近畿大学博士,从事数论及其应用研究。

存在正整数 k 可使式(2)不成立，则可设 k_0 是不满足式(2)的最小正整数。此时，$k_0>1$，而且 k_0 满足

$$\sum_{m=1}^{k_0-1}\frac{1}{m}\leqslant \log(k_0-1)+1 \tag{3}$$

以及

$$\sum_{m=1}^{k_0}\frac{1}{m}>\log k_0+1。 \tag{4}$$

然而，根据引理 1，从式(3)和(4)可得

$$\frac{1}{k_0}>\log k_0-(\log k_0-1)=$$
$$\log\left(1+\frac{1}{k_0-1}\right)>\frac{1}{k_0} \tag{5}$$

这一矛盾。因此任何正整数 k 都满足(2)。证完。

引理 3 设 a 和 b 是适合 $a>1$ 以及 $b>\max\{4,a\}$ 的实数。如果实数 z 满足

$$z<a\log z+b, \tag{6}$$

则必有 $z<4ab$。

证 明 设实函数

$$f(z)=z-a\log z-b。 \tag{7}$$

当 $z=4ab$ 时，如果 z 满足式(6)，则从 $4ab<a(\log 4+\log a+\log b)+b$ 可得 $4<(\log 4)/b+(\log a)/b+(\log b)/b+1/a<4$ 这一矛盾。因此有

$$f(4ab)\geqslant 0。 \tag{8}$$

从式(7)可知 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)=1-a/z$，所以当 $z>a$ 时，必有 $f'(z)>0$。因此，当 $z>a$ 时，$f(z)$ 是递增函数；故从式(8)可知 $z\geqslant 4ab$ 时，必有 $f(z)\geqslant 0$。于是，从式(7)可知：如果 z 满足式(6)，$f(z)<0$，所以 $z<4ab$。证完。

引理 4[8] 如果 $n=q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_k^{r_k}$ 是正整数 n 的标准分解式，则 $S(n)=\max\{S(q_1^{r_1}),S(q_2^{r_2}),\cdots,S(q_k^{r_k})\}$。

引理 5[8] 对于素数 q 以及正整数 r，如果 $r\leqslant q$，则 $S(q^r)=qr$。

引理 6[3] 如果 q 是 M_p 的素因数，则必有 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\,2p)$。

2 定理 1 的证明

从文献[4]的结果可知本定理在 $x\leqslant 5$ 时成立，因此以下仅需讨论 $x>5$ 时的情况。设

$$M_p=2^p-1=q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_k^{r_k} \tag{9}$$

是 Mersenne 数 M_p 的标准分解式，其中 $q_1^{r_1},q_2^{r_2},\cdots,q_k^{r_k}$ 是适合

$$q_1^{r_1}<q_2^{r_2}<\cdots<q_k^{r_k} \tag{10}$$

的奇素数。根据引理 6 可知 $q_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,2p)$ $(i=1,2,\cdots,k)$，故有

$$q_i=2s_ip+1, s_i\in N, i=1,2,\cdots,k; \tag{11}$$

并且从式(10)可知

$$1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_k。 \tag{12}$$

因为从式(11)可知

$$q_i^p=(2s_ip+1)^p>p^p>2^p-1=M_p, i=1,2,\cdots,k,$$

所以从式(9)可得

$$r_i<p<q_i, i=1,2,\cdots,k。 \tag{13}$$

因此，根据引理 4 和 5，从式(9)和(13)可知

$$S(M_p)=$$
$$\max\{S(q_1^{r_1}),S(q_2^{r_2}),\cdots,S(q_k^{r_k})\}=$$
$$\max\{q_1r_1,q_2r_2,\cdots,q_kr_k\}。 \tag{14}$$

如果 $S(M_p)<2xp+1$，则有 $S(M_p)<2xp$。此时从式(11)和(14)可得

$$x\geqslant \max\left\{\frac{q_1r_1}{2p},\frac{q_2r_2}{2p},\cdots,\frac{q_kr_k}{2p_k}\right\}>$$
$$\max\{r_1s_1,r_2s_2,\cdots,r_ks_k\} \tag{15}$$

由于从式(12)可知 $s_k\geqslant k$，所以从式(15)可知

$$r_i<\frac{x}{s_i}, i=1,2,\cdots,k, \tag{16}$$

$$s_i<\frac{x}{r_i}, i=1,2,\cdots,k, \tag{17}$$

以及

$$k<x。 \tag{18}$$

根据引理 1，从式(11)和(16)可知

$$\log q_i^{r_i}=r_i\log(2s_ip+1)<$$
$$r_i\left(\log(2s_ip)+\frac{1}{2s_ip}\right)$$
$$<\frac{x}{s_i}\left(\log p+\log 2+\log s_i+\frac{1}{2s_ip}\right),$$
$$i=1,2,\cdots,k。 \tag{19}$$

因为 $2^{p-1}<2^p-1$，所以从式(9)和(19)可得

$$(p-1)\log 2<\log(2^p-1)=\sum_{i=1}^{k}\log q_i^{r_i}<$$
$$x(\log p)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i}+x(\log 2)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i}+$$
$$x\sum_{i=1}^{k}\frac{\log s_i}{s_i}+\frac{x}{2p}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i^2}。 \tag{20}$$

由于从式(12)可知 $s_i>i(i=1,2,\cdots,k)$，所以根据引理 2，从式(18)可得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}<\log k+1<\log x+1。\tag{21}$$

又因从式(17)可知 $\log s_i<\log x(i=1,2,\cdots,k)$，故从式(21)可得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\log s_i}{s_i}<(\log x)(\log x+1)。\tag{22}$$

由于 $x>5$，将式(21)和(22)代入式(20)可知

$$p<\frac{x(\log x+1)}{\log 2}\log p+\frac{x(\log x+1)^2}{\log 2}。\tag{23}$$

因此，根据引理2，从式(23)可知: 如果 $S(M_p)<2xp+1$，则 p 满足

$$p<\frac{4x^2(\log x+1)^3}{(\log 2)^2}<9x^2(\log x+1)^3。\tag{24}$$

于是，从式(24)可知: 当 $p\geqslant 9x^2(\log x+1)^3$ 时，必有 $S(M_p)\geqslant 2xp+1$。定理证完。

参考文献:

[1] GUY R K. Unsolved Problems in Number Theory, Third Edition [M]. Beijing: Science Press, 2007.

[2] LE M H. A lower bound for $S(2^p(2^p-1))$ [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1): 217-218.

[3] 苏娟丽. 关于Smarandache函数的一个新的下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.

[4] 温田丁. Smarandache函数的一个下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 413-416.

[5] 李粉菊，杨畅宇. Smarandache函数在数列 a^p+b^p 上的下界估计[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2011, 41(3): 378-379.

[6] 石鹏，刘卓. Smarandache函数在数列 a^p+b^p 上的一个新的下界估计[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(8): 10-14.

[7] 邓东皋，尹小玲，数学分析简明教程，上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[8] MARK F, PATRICK M. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 2-3.

(编 辑 亢小玉)

(上接第366页)

易知 C_i 映 $L_{pi}[I,E]$ 入 $C[I,E]$ 为增算子(见文献[3]定理4证明)，令 $A=\sum_{i=1}^{m}C_iF_i$，由 f_i 的混合单调性可得，F_i 是混合单调算子，则

$$u_0\leqslant F_i(u_0,v_0),\ F_i(v_0,u_0)\leqslant v_0,\tag{11}$$

再由引理2可知，A 为混合单调算子。显然Volterra积分方程组(9)可转化为如下算子方程组:

$$\begin{cases}u=A(u,v)\\v=A(v,u)\end{cases},\tag{12}$$

因 $L_{pi}[I,E]$ 和 $C[I,E]$ 是半序Banach空间，则 $C[I,E]$ 是半序加群，$L_{pi}[I,E]$ 是序列相容的半序拓扑空间。由(H_3)可得，$u_0\leqslant A(u_0,v_0)$，$A(v_0,u_0)\leqslant v_0$。因 E 是自反的，再由引理5可知 $L_{pi}[I,E]$ 是自反的，再由 P 的正规性及引理6可知 $\bar{P}$ 是 $L_{pi}[I,E]$ 中的正规锥，从而 $\bar{P}$ 也是正则的，由式(11)可得 $F_i(D\times D)$ 是按序有界的，故 $F_i(D\times D)$ 是列紧的，显然 $F_i(D\times D)$ 也是拟可分的拟列紧集。因此，由定理1可得，A 有最大耦合不动点和最小耦合不动点，故Volterra积分方程组(9)存在最大耦合拟解和最小耦合拟解。证毕。

参考文献:

[1] SUN Jing-xian, ZHAO Zeng-qin. Fixed point theorems of increasing operators and applications to nonlinear integro-differential equations with discontinuous terms [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1993, 175: 33-45.

[2] 陈顺清. 非连续混合单调算子的耦合不动点定理[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1994, 19(2): 128-133.

[3] 周智，于朝霞. 混合单调算子的不动点定理及应用[J]. 高校应用数学学报, 1997, 12A(3): 347-352.

[4] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[5] 孙经先. 非线性泛函分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

(编 辑 亢小玉)